Differenciaegyenletek a differenciálegyenletek tükrében

Guzsvány Szandra
Újvidéki Egyetem,
Természettudományi Kar, Újvidék
E-mail: g.sandra@citromail.hu

1. Bevezetés

1.1. Történeti áttekintés

Dolgozatom célja a differenciálegyenletek és a kevésbé ismert differenciaegyenletek összehasonlítása volt. A differenciaegyenletek tanulmányozása még a XVII. században kezdődött. Brook Taylor (1685-1731) volt az első aki a "The Method of Increments" című könyvében foglalkozott a differenciaszámítással 1715-ben. 1759-ben Joseph Luis Lagrange (1736-1813) oldott lineáris, változó együtthatós differenciaegyenleteket. Ezeket az eredményeket Pierre Simon Laplace (1749-1827) általánosította az 1774-ben és 1776-ban kiadott munkáiban. Leonhard Euler (1707-1783) 1755-ben az "Institutiones calculi differentialis" című munkájában foglalkozik a véges differenciák elméletével, valamint ő vezette be a Δ jelet a differenciára. A differenciaszámítás problémáival foglalkozott még Nicolas De Condorcet (1743-1794), Gaspard Monge (1746-1818) és sokan mások. Ismert George Boole (1815-1864) könyve a "Calculus of Finite Differences" 1860-ból, ami formális analógiát mutat a differenciaszámítás és differenciálszámítás között. Fontos még Louis Melville Milne-Thomson (1891-1974) "The Calculus of Finite Differences" 1933-ban kiadott könyve, valamint Charles Jordan "Calculus of Finite Differences" könyve 1939-ből.

1.2. A munka célja

A dolgozat célja a differenciálegyenletek és a differenciaegyenletek fogalmának bevezetése a szimmetria tükrében. Az első részben bemutatom a differenciálegyenlet fogalmát, valamint a differenciálegyenletek megoldásait. Foglalkozom néhány differenciálegyenlet típussal, azután pedig bemutatok néhány olyan példát, amelyeknél a megoldások grafikonjai szimmetrikusak. A második részben először bevezetem a differenciaegyenlet fogalmát, majd a differenciaegyenlet különböző megoldásait definiálom. Ezután differenciaegyenlet típusokat mutatok be, és kihangsúlyozom az alapvető

hasonlóságot és különbséget a differenciál- és differenciaegyenletek, valamint azok megoldásai között. A két tudományterület és a megfelelő fogalmak analógiája miatt tekinthetjük a differenciaegyenletek elméletét úgy, mintha a differenciálegyenleteket néznénk egy különleges tükörből. Megfigyelhető, hogy nem csak a differenciál- s differenciaegyenletek alakja, de megoldási módszereik is hasonlóak. A differenciagyenletekre is olyan példákat mutatok be, amelyeknél a megoldások grafikonjai valamilyen szimmetria tulajdonsággal rendelkeznek.
Feladatom a dolgozat írása során az volt, hogy bebizonyítsam azokat a tételeket, melyeknek bizonyítását nem találtam meg a tanulmányozott irodalomban, elvégezzem az összehasonlításokat, kiemeljem a jellegzetes különbségeket, valamint hogy szemléltető példákkal illusztráljam ezeket.

2. Közönséges differenciálegyenletek

2.1. Alapfogalmak

Először definiálom mit jelent a differenciálegyenlet.

2.1. Definíció. *Azt a függvényegyenletet, amely a független változót, az ismeretlen függvényt, valamint az ismeretlen függvény deriváltjait tartalmazza, differenciálegyenletnek nevezzük. A differenciálegyenlet rendje az ismeretlen függvény differenciálegyenletben szereplő legmagasabb deriváltjának a rendje.*

Az algebrai egyenletekhez hasonlóan a differenciálegyenletekben is van ismeretlen, de az most nem szám, hanem függvény. Az egyenlet megoldásakor olyan $y = y(x)$ függvényeket keresünk, amelyeket deriváltjaikkal együtt a differenciálegyenletbe helyettesítve az x változóban egy azonosságot kapunk. Az egyszerűbb felírás kedvéért, az x független változójú $y(x)$ függvény helyett a differenciálegyenletekben csak y-t írunk.
Adott $F : (a, b) \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ és $f : (a, b) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényekre az elsőrendű differenciálegyenlet implicit alakja

$$F(x, y, y') = 0, \quad \text{illetve} \quad F(x, y, Dy) = 0 \tag{2.1}$$

explicit alakja pedig

$$y' = f(x, y).$$

Adott $G : (a, b) \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ és $g : (a, b) \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvényekre a másodrendű differenciálegyenlet implicit alakja

$$G(x, y, y', y'') = 0, \text{illetve} \quad G(x, y, Dy, D^2y) = 0 \tag{2.2}$$

explicit alakja pedig

$$y'' = g(x, y, y').$$

2.2. Definíció. *A közönséges differenciálegyenlet megoldása minden olyan egyváltozós valós függvény, amely a deriváltjaival együtt kielégiti az adott differenciálegyenletet.*

Megoldani egy differenciálegyenletet annyit jelent, mint megkeresni minden megoldását. A differenciálegyenletek elméletében a differenciálegyenleteknek különböző megoldásai léteznek.

2.3. Definíció. *Elsőrendű differenciálegyenlet általános megoldása olyan megoldás, amelyben szerepel egy tetszőleges állandó.*

2.4. Definíció. *Az $y' = f(x, y)$ elsőrendű differenciálegyenlet minden olyan megoldását, amelyet az egyenlet $y = y(x, C)$ általános megoldásából kapunk az ott szereplő tetszőleges C állandó egy konkrét (megengedett) $C = C_0$ értékére, partikuláris megoldásnak nevezzük.*

Az elsőrendű differenciálegyenlet általános megoldása egy egyparaméteres görbesereget határoz meg. Ennek a görbeseregnek egy görbéje egy partikuláris megoldás grafikonját jelenti.

2.5. Definíció. *Másodrendű differenciálegyenlet általános megoldása minden olyan megoldás, amelyben két tetszöleges állandó szerepel.*

A másodrendű differenciálegyenlet általános megoldása egy kétparaméteres görbesereget határoz meg.

2.6. Definíció. *Az $y'' = g(x, y, y')$ másodrendű differenciálegyenlet minden olyan megoldását, amelyet az egyenlet $y = y(x, C_1, C_2)$ általános megoldásából kapunk vagy csak a C_1, vagy csak a C_2, vagy mindkét tetszőleges állandó konkrét $C_1 = C_0^1$ vagy $C_2 = C_0^2$ értékére, partikuláris megoldásnak nevezzük.*

2.7. Definíció. *Az $y' = f(x, y)$ egyenlethez tartozó kezdetiérték-problémának nevezzük azt a feladatot, amikor az f függvény értelmezési tartományának egy (x_0, y_0) pontja esetén, az $y' = f(x, y)$ egyenletnek egy olyan $y = \varphi(x)$ megoldását keressük valamely I intervallumon, amelyre $x_0 \in I$ és $\varphi(x_0) = y_0$ teljesül.*

2.2. Néhány differenciálegyenlet típus

Ebben a fejezetben bemutatok néhány közismert differenciálegyenlet típust. Az itt szereplő tételeket nem bizonyítom, de az olvasó megtalálhatja a őket a [1], [2] és [4] könyvekben.

2.2.1. Lineáris differenciálegyenlet

Először definiálom a lineáris differenciálegyenletet.

2.8. Definíció. *Az*

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2.3}$$

alakú differenciálegyenletet, ahol p és q az x független változótól függő adott folytonos függvények, elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.

A lineáris differenciálegyenlet megoldására felírható a következő tételt.

2.1. Tétel. *A (2.3) lineáris differenciálegyenlet általános megoldásának alakja*

$$y = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + \frac{C}{e^{\int p(x)dx}},$$

ahol C tetszőleges állandó.

2.3. Másodrendű konstans együtthatós lineáris differenciálegyenletek

2.3.1. Homogén differenciálegyenletek

2.9. Definíció. *Az*

$$ay'' + by' + cy = 0$$

alakú differenciálegyenletet, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ tetszőleges állandók és $a \neq 0$, homogén másodrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.

A homogén differenciálegyenlet megoldása visszavezethető egy másodfokú algebrai egyenlet megoldására, és ezt a következő tételben meg is fogalmazom.

2.2. Tétel. *A $ay'' + by' + cy = 0$ differenciálegyenletnek az $y = e^{rx}$ megoldása akkor és csakis akkor ha $ar^2 + br + c = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $y = e^{rx}$. Ekkor $y' = re^{rx}$ és $y'' = r^2e^{rx}$. Ha ezt behelyettesítjük a differenciálegyenletbe, akkor a következőt kapjuk:

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0.$$

Ezt az egyenletet eloszthatjuk e^{rx}-el, és így az

$$ar^2 + br + c = 0$$

egyenletet kapjuk. $\diamond$

A $ar^2 + br + c = 0$ egyenletet karakterisztikus egyenletnek nevezzük. A differenciálegyenlet megoldásának alakja a karakterisztikus egyenlet megoldásának fajtájától függ.

- Ha $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ és $r_1 \neq r_2$, akkor a megoldás

  $$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x},$$

  ahol c_1 és c_2 tetszőleges állandók.

- Ha $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ és $r_1 = r_2$, akkor a megoldás

  $$y = c_1e^{r_1x} + c_2xe^{r_1x},$$

  ahol c_1 és c_2 tetszőleges állandók.

- Ha $r_1 = \alpha + \beta i, r_2 = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$, akkor a megoldás

  $$y = (c_1 \cos \beta x + c_2 \cos \beta x)e^{\alpha x},$$

  ahol c_1 és c_2 tetszőleges állandók.

2.3.2. Inhomogén differenciálegyenletek

2.10. Definíció. *Az*

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x) \tag{2.4}$$

alakú differenciálegyenletet, ahol $g(x)$ folytonos függvény, $a, b \in \mathbb{R}$ tetszőleges állandók és $a \neq 0$, inhomogén másodrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.

Az inhomogén differenciálegyenlet megoldásának az alakja a következő tételben van megfogalmazva.

2.3. Tétel. *Az*

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x)$$

inhomogén egyenlet megoldása

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x),$$

ahol az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ az inhomogén egyenlethez tartozó homogén egyenlet általános megoldása, $y_p(x)$ pedig az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása.

Az inhomogén egyenletek a konstansvariációs módszerrel vagy a határozatlan együtthatók módszerével oldhatóak meg.

1. Konstansvariációs módszer
A konstansvariációs módszernél a partikuláris megoldást az

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

alakban keresük. A $c_1(x)$ és $c_2(x)$ függvényeket úgy kell meghatározni, hogy az $y_p(x)$ megoldása legyen az (2.4) egyenletnek. A következő tételben bemutatjuk, hogyan határozhatók meg a $c_1(x)$ és $c_2(x)$ függvények.

2.4. Tétel. *Az*

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x)$$

inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

alakban keressük, ahol $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ az inhomogén egyenlethez tartozó homogén egyenlet álatános megoldása, a $c_1(x)$ és $c_2(x)$ függvényeket pedig a következő egyenletrendszerből határozzuk meg:

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$$

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = g(x)$$

Az inhomogén egyenleteket más módszerrel is megoldhatjuk. Ennek az eljárásnak a neve határozatlan együtthatók módszere.

2. Határozatlan együtthatók módszere
A (2.4) konstans együtthatós inhomogén egyenlet partikulális megoldását a $g(x)$ függvény alakjától függően határozhatjuk meg.

- Ha $g(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, akkor

$$y_p(x) = (b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0)x^s, \quad s \in 0, 1, 2.$$

- Ha $g(x) = (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)e^{\alpha x}$, akkor

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0)x^s, \quad s \in 0, 1, 2.$$

- Ha $g(x) = (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)e^{\alpha x} \sin \beta x$, akkor

$$y_p(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x(b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0)x^s, \quad s \in 0, 1, 2.$$

- Ha $g(x) = (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)e^{\alpha x} \cos \beta x$, akkor

$$y_p(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x(b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0)x^s, \quad s \in 0, 1, 2.$$

Az s paraméter értéke attól függ, hogy a megfelelő homogén egyenletet milyen lineárisan független partikuláris megoldások alkotják. Pontosabban, az $s \in 0, 1, 2$ értékeket az s paraméter a következő gondolatmenet útján veszi fel: az $s = 0$ esetben leellenőrizzük, hogy van-e rezonancia a megfelelő homogén egyenlet általános megoldásával, vagyis az $y_p(x)$ lineáris kombinációját alkotó függvények közül valamelyik szerepel-e már a megfelelő homogén egyenlet általános megoldásában. Ha igen, akkor az $s = 1$ esetben újra ellenőrizzük a rezonanciát. Ha még mindig létezik rezonancia, akkor az $s = 2$ értéket helyettesítjük be.
A $b_s, b_{s-1}, \ldots, b_0$ határozatlan együtthatókat az egyenletbe való behelyettesítéssel kapjuk meg.

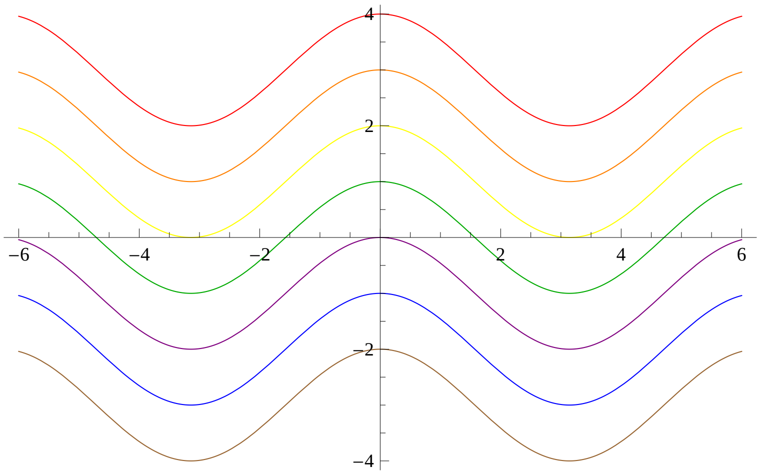
2.4. Koordinátarendszer és tükörképek

Ebben a fejezetben olyan példákat mutatok be, ahol a differenciálegyenlet általános megoldása olyan görbesereg, amely valamilyen szimmetria tulajdonságot mutat. Lesznek olyan görbék például, amelzek tengelyesen szimmetrikusak az y-tengelyre, vagyis az y-tengelyre tükrözhető, azután olyanok, amelyek középpontosan szimmetrikusak az origóra, vagy ahol a görbesereg bizonyos elemei egymás tükörképei az x-tengelyhez viszonyítva.

2.1. Példa. Tekintsük meg a $y' = -sinx$ differenciálegyenletet, melynek a megoldása a következőképp zajlik.

$$dy = -\sin x dx$$
$$\int 1 dy = -\int \sin x dx$$
$$y = \cos x + C$$

A következő grafikonon a differenciálegyenlet partikuláris megoldásai láthatóak a C ={$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ } értékekre.



1. ábra

Az 1. ábrán látható megoldások szimmetrikusak az y-tengelyre.

Most oldjuk meg a következő példát.

2.2. Példa. A $y' = 4x\sqrt{y}$ alakú differenciálegyenletetmegoldása így zajlik.

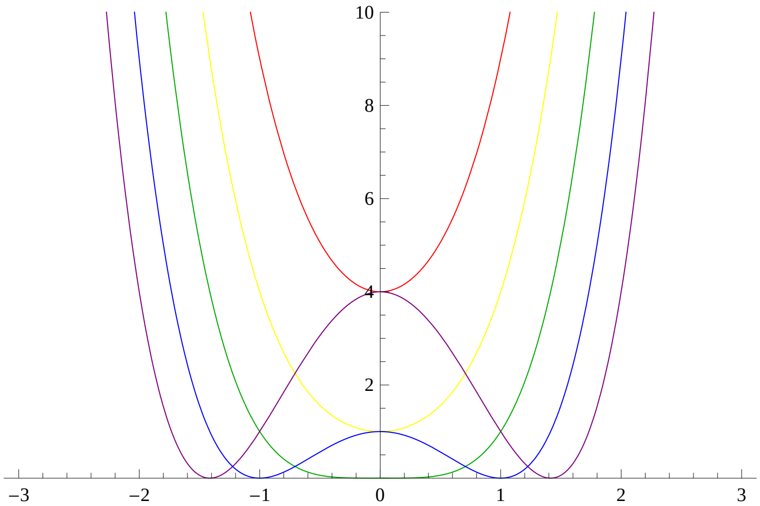
$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 4xdx$$

$$2\sqrt{y} = 2x^2 + C_1$$

$$\sqrt{y} = x^2 + C_2$$

$$y = (x^2 + C_2)^2$$

A következő grafikonon a differenciálegyenlet partikuláris megoldásai láthatóak a $C_2 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ értékekre.



2. ábra

Az 2. ábrán látható megoldások szimmetrikusak az y-tengelyre, vagyis az y-tengelyre tükrözhetők.

2.3. Példa. Nézzük meg a $y = xy'$ differenciálegyenletet megoldását.

$$y = x\frac{dy}{dx}$$

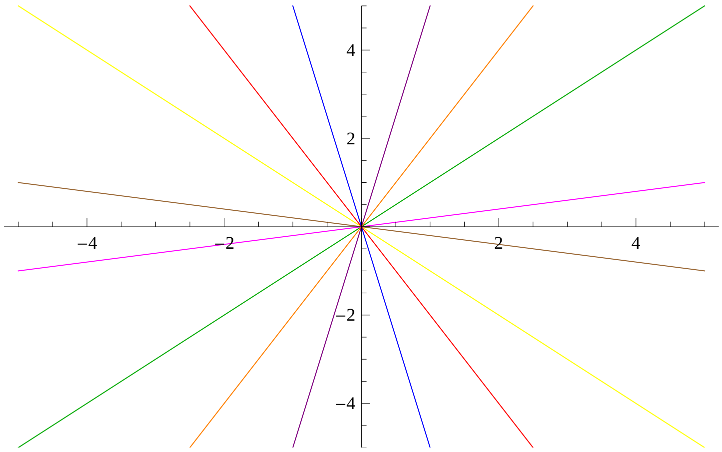
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C_1$$

$$|y| = C_1|x|$$

$$y = C_2 x$$

A következő grafikonon a differenciálegyenlet partikuláris megoldásai láthatóak a $C_2 = \{-5, -2, -1, -0.2, 0.2, 1, 2, 5\}$ értékekre.



3. ábra

Az 3. ábrán látható megoldások középpontosan tükrözhetők a $(0,0)$ ponton, azaz a koordinátarendszer kezdőpontján, valamint a partikuláris megoldások egymás tükörképei az x-tengelyen és y-tengelyen keresztül, amikor a megoldásoknál a C_2 és $-C_2$ konstansokat választjuk.

2.4. Példa. Oldjuk meg a $y' = -\dfrac{x}{y}$ differenciálegyenletet.

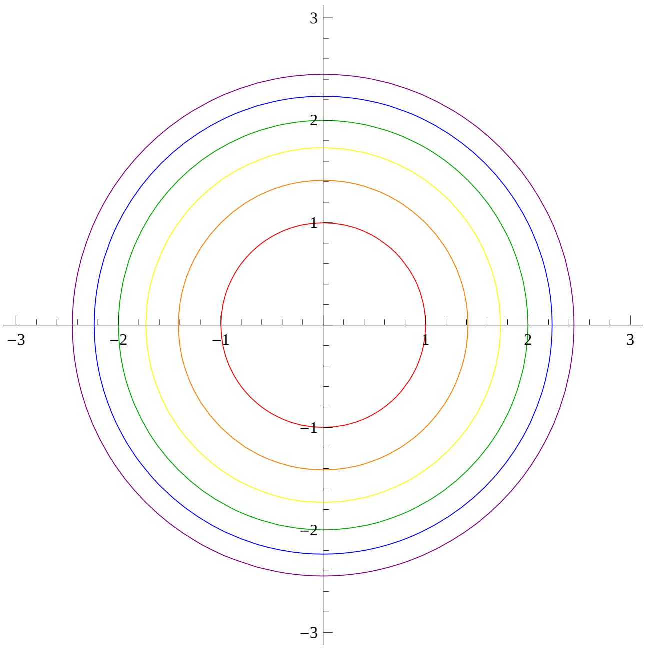
$$\int y dy = -\int x dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$x^2 + y^2 = 2C_1$$

$$x^2 + y^2 = C_2$$

A következő grafikonon a differenciálegyenlet partikuláris megoldásai láthatóak a $C_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ értékekre.



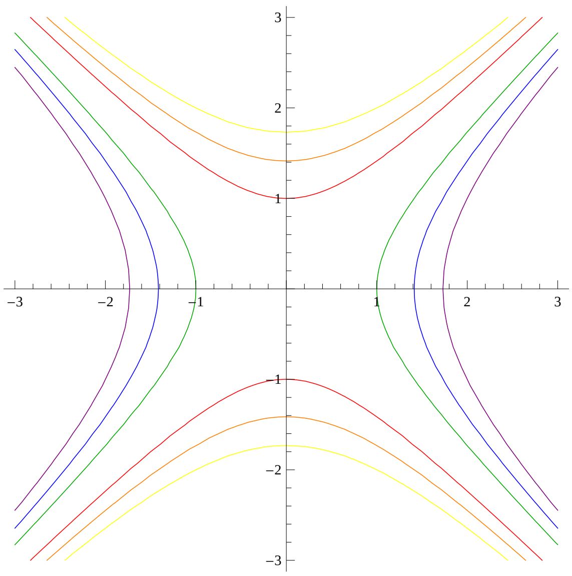
4. ábra

Ennek a differenciaegyenletnek a partikuláris megoldásai szimmetrikusak az y-tengelyre, az x-tengelyre és a $(0,0)$ pontra is, vagyis tengelyesen és középpontosan is tükrözhetők.

2.5. Példa. Oldjuk meg a $y' = \dfrac{x}{y}$ differenciálegyenletet.

$$\int y dy = \int x dx, \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1, \quad y^2 - x^2 = 2C_1, \quad y^2 - x^2 = C_2.$$

A következő grafikonon a differenciálegyenlet partikuláris megoldásai láthatóak a $C_2 = \{-1, -2, -3, 1, 2, 3\}$ értékekre.



5. ábra

Ennek a differenciaegyenletnek a partikuláris megoldásai szimmetrikusak, vagyis tükrözhetők az y-tengelyre, az x-tengelyre és a $(0,0)$ pontra is.

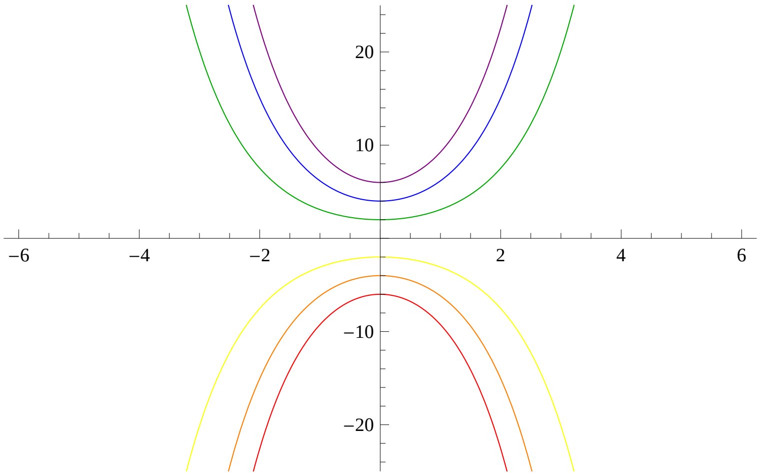
2.6. Példa. Tekintsük meg a $y'' - y = 0$ differenciálegyenletet.
Az egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$r^2 - 1 = 0$$

Ebből következik, hogy az $r_1 = 1$ és $r_2 = -1$. Vagyis a differenciálegyenlet megoldása

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$$

A következő grafikonon a differenciálegyenlet partikuláris megoldásai láthatóak a $C_1 = \{-3,-2,-1,1,2,3\}$ és $C_1 = \{-3,-2,-1,1,2,3\}$ értékekre.



6. ábra

Az 6. ábrán látható megoldások szimmetrikusak az y-tengelyre, valamint, ha a konsansokat úgy választjuk két megoldásnál, hogy C_1 és $-C_1$, C_2 és $-C_2$ akkor a két megoldásgörbe is egymás tükörképe az x-tengelyen keresztül.

2.7. Példa. Nézzük meg a $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0$ differenciálegyenletet.
Először helyettesítsük az $x = e^t$ változót. Ekkor $y = y(t)$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{e^t}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx}}{\frac{d}{dt}x} = \frac{\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{e^t}}{e^t} = \frac{1}{e^t}\frac{d}{dt}(\dot{y}e^t) = \frac{1}{e^t}(\ddot{y}e^{-t} - \dot{y}e^{-t}) = (\ddot{y} - \dot{y})\frac{1}{e^{2t}}$$

Ha ezt behelyettesítjük az egyenletbe:

$$e^{2t}(\ddot{y} - \dot{y})\frac{1}{e^{2t}} - 5e^t\frac{\dot{y}}{e^t} + 8y = 0$$

$$\ddot{y} - 6\dot{y} + 8y = 0$$

Ennek a differenciálegyenletnek a karakterisztikus egyenlete

$$r^2 - 6r + 8 = 0.$$

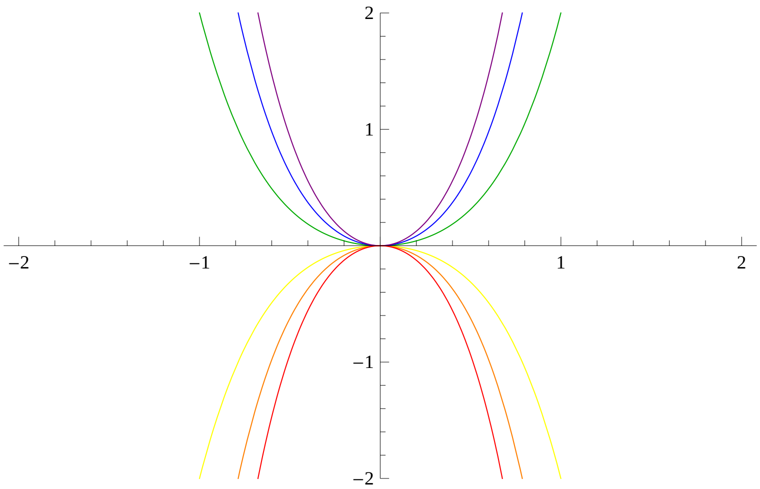
Ekkor $r_1 = 2$ és $r_2 = 4$. Ebből következik, hogy a differenciálegyenlet megoldása

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}.$$

Ha visszahelyettesítjük az x-et akkor

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^4.$$

A következő grafikonon a differenciálegyenlet partikuláris megoldásai láthatóak a $C_1 = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ és $C_1 = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ értékekre.



7. ábra

Az 7. ábrán látható megoldások szimmetrikusak az y-tengelyre, valamint, ha a konstansokat úgy választjuk két megoldásnál, hogy C_1 és $-C_1$, C_2 és $-C_2$ akkor a két megoldásgörbe is egymás tükörképe az x-tengelyen keresztül.

Megfigyelhető, hogy a 3. példa kivételével, minden differenciálegyenlet partikuláris megoldásai szimmetrikusak az y-tengelyre, míg a 3.,4.,5.,6. és 7. példa egy-egy partikuláris megoldása tükörképei egymásnak az x-tengelyen keresztül , a 3. példa egy-egy partikuláris megoldása tükörképei egymásnak az y-tengelyen keresztül, és a 3.,4. és 5. példa partikuláris megoldásai szimmetrikusak a $(0,0)$ pontra is.

3. Differenciaegyenletek

Ebben a fejezetben a differenciaegyenletekről lesz szó. Bemutatom, hogy az ismert differenciálegyenletekhez hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, és a megoldásukat is hasonlóképp végezzük.

3.1. Alapfogalmak

Ebben a dolgozatban a differenciaegyenleteket fogalmát a számsorozatok segítségével vezetem be. Először definiálom, mi is az a számsorozat.

3.1. Definíció. *Azokat az $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ valós függvényeket, melyek minden n természetes számhoz egy a_n valós számot rendelnek hozzá, végtelen számsorozatoknak, röviden sorozatoknak nevezzük. a_n a sorozat n-edik eleme (vagy tagja), amelyet szokás a sorozat általános elemének is nevezni. Magát a sorozatot $\{a_n\}$-nel jelöljük.*

Most a véges differencia fogalmának definíciója következik.

3.2. Definíció. *Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat véges differenciáján a*

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \quad n = 1, 2, ...$$

különbséget értjük.

Az a leképezés, amely az $\{a_n\}$ sorozathoz hozzárendeli a $\{\Delta a_n\}$ sorozatot, a következő tulajdonsággal rendelkezik:

$$\Delta(a_n + b_n) = \Delta a_n + \Delta b_n,$$

és ha λ valós szám, akkor

$$\Delta(\lambda a_n) = \lambda \cdot \Delta a_n,$$

vagyis a Δ az összeadással és a λ-val való szorzással felcserélhető. Ezt a tulajdonságot úgy fejezzük ki röviden, hogy Δ *lineáris*. A második differenciát a következőképpen értelmezzük:

$$\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n.$$

Ezek alapján definiálható a differenciaegyenlet fogalma.

3.3. Definíció. *Azt az függvényegyenletet, amely a független változót, az ismeretlen függvényt, valamint az ismeretlen függvény differenciáját tartalmazza, differenciaegyenletnek nevezzük. A differenciaegyenlet rendje az ismeretlen függvény differenciaegyenletben szereplő legmagasabb differenciájának a rendje.*

A definícióban függvényt említek, de a valós függvények egy speciális esetére gondolok, a sorozatokra. A differenciálegyenletekhez hasonlóan a differenciaegyenletekben az ismeretlen egy számsorozat. Az egyenlet megoldásakor olyan y_n sorozatokat keresünk, amelyeket differenciáikkal együtt a differenciaegyenletbe helyettesítve egy azonosságot kapunk.

Adott $F : \mathbf{N} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ és $f : \mathbf{N} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényekre az elsőrendű differenciaegyenlet implicit alakja

$$F(n, y_n, \Delta y_n) = 0, \tag{3.5}$$

explicit alakja pedig

$$\Delta y_n = f(n, y_n).$$

Adott $G : \mathbf{N} \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ és $g : \mathbf{N} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvényekre a másodrendű differenciálegyenlet implicit alakja

$$G(n, y_n, \Delta y_n, \Delta^2 y_n) = 0, \tag{3.6}$$

explicit alakja pedig

$$\Delta^2 y_n = g(n, y_n, \Delta y_n).$$

A differenciaegyenleteket megadhatjuk a Δ operátor segítségével, de sok esetben a $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ és $\Delta^2 a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$ egyenlőségeket alkalmazva írjuk fel az egyenletet. Ebben a dolgozatban mindkét jelölést használom majd, hogy az analógiákra jobban rá tudjak mutatni. Az alapfogalmak bevezetésénél az első alakot használom, a differenciaegyenlet típusoknál pedig a másodikat.
Most pedig a differenciaegyenlet megoldásának fogalmát definiálom.

3.4. Definíció. *A differenciaegyenlet megoldása minden olyan valós számsorozat amely kielégíti a differenciaegyenletet.*

3.5. Definíció. *Elsőrendű differenciaegyenlet általános megoldása olyan megoldás, amelyben szerepel egy tetszőleges 1-periodikus függvény.*

3.6. Definíció. *Az $f(x) = f(x + 1)$ alakú függvényeket 1-periodikus függvényeknek nevezzük.*

3.7. Definíció. *A $\Delta y_n = f(n, y_n)$ elsőrendű differenciaegyenlet minden olyan megoldását, amelyet az egyenlet $y_n = y_n(C)$ általános megoldásából kapunk a C paraméter egy konkrét (megengedett) $C = C_0$ értékére, ahol C tetszőleges 1-periodikus függvény, partikuláris megoldásnak nevezzük.*

3.8. Definíció. *Másodrendű differenciaegyenlet általános megoldása minden olyan megoldás, amelyben két tetszőleges 1-periodikus függvény szerepel.*

3.9. Definíció. *Az $\Delta^2 y_n = g(n, y_n, \Delta y_n)$ másodrendű differenciálegyenlet minden olyan megoldását, amelyet az egyenlet $y_n = y_n(C_1, C_2)$ általános megoldásából kapunk vagy csak a C_1, vagy csak a C_2, vagy mindkét paraméter konkrét $C_1 = C_0^1$ vagy $C_2 = C_0^2$ értékére, ahol C_1 és C_2 1-periodikus függvények, partikuláris megoldásnak nevezzük.*

Megállapítható, hogy a differenciálegyenletek és a differenciaegyenletek definiálása hasonló, és hasonló típusú egyenletekre hasonló megoldási eljárások találhatók. Ezért tekinthetjük a differenciaegyenletek elméletét úgy, mintha egy tükörből néznénk a differenciálegyenleteket. A sok hasonlóság mellett viszont lényegbeli különbözőségeket is észrevehetünk a két tudományterület között. A differenciálegyenleteknél az általános megoldás egy függvénysereg, melyek grafikonjai olyan folytonos görbék, amelyek konstansban különböznek egymástól. A differenciaegyenletek esetében az általános megoldás viszont egy sorozatsereg, melyek grafikonjai diszkrét pontok, és amelyek 1-periodikus függvényben különböznek egymástól.

3.2. Néhány differenciaegyenlet típus

Ebben a fejezetben a differenciálegyenleteknél már bemutatott típusoknak megfelelő differenciaegyenlet típusokkal foglalkozom.

3.2.1. Elsőrendű lineáris differenciaegyenletek

3.10. Definíció. *Az*

$$y_{n+1} - p_n y_n = q_n$$

alakú differenciaegyenletet, ahol $\{p_n\}$ *és* $\{q_n\}$ *tetszőleges való számsorozatok, elsőrendű lineáris differenciaegyenletnek nevezzük.*

A lineáris differenciaegyenlet megoldására felírható a következő tétel.

3.1. Tétel. *Az*

$$y_{n+1} - p_n y_n = q_n$$

elsőrendű lineáris differenciaegyenlet megoldásának alakja, ahol $\{p_n\}$ *és* $\{q_n\}$ *tetszőleges való számsorozatok, a következő*

$$y_n = P_n \Delta^{-1} \frac{q_n}{P_{n+1}} + CP_n.$$

Bizonyítás. A lineáris differenciaegyenletet megoldhatjuk, ha egy tetszőleges $n = \alpha$ kezdeti értékre adott $y_\alpha = y_0$. Ekkor az S halmaz $\alpha, \alpha+1, \alpha+2, ...$ számokból áll. Először tekintsük meg az

$$y_{n+1} - p_n y_n = 0, y_\alpha = y_0$$

egyenletrendszert. Ebből kifejezhetjük a következőket

$$y_n = p_{n-1} y_{n-1}$$

$$y_{n-1} = p_{n-2} y_{n-2}$$

$$\cdots$$

$$y_{\alpha+1} = p_\alpha y_\alpha$$

Ebből

$$y_n = y_0 p_\alpha p_{\alpha+1} \cdots p_{n-1} = y_0 P_n \tag{3.7}$$

ahol P_n egyenlő

$$P_n = \prod_{t=\alpha}^{n-1} p_t, P_\alpha = 1$$

A fenti 3.7 egyenletből

$$\Delta \left(\frac{y_n}{P_n} \right) = \frac{y_{n+1}}{P_{n+1}} - \frac{y_n}{P_n} = \Delta y_0 = 0$$

Az

$$y_{n+1} - p_n y_n = q_n$$

egyenletet P_{n+1}-el osztva a következőt adja

$$\frac{y_{n+1}}{P_{n+1}} - \frac{y_n}{P_n} = \frac{q_n}{P_{n+1}}.$$

Ebből

$$\Delta\frac{y_n}{P_n} = \frac{q_n}{P_{n+1}}$$

$$\frac{y_n}{P_n} = \Delta^{-1}\frac{q_n}{P_{n+1}} + C$$

ahol C tetszőleges 1-periodikus függvény.

$$y_n = P_n\Delta^{-1}\frac{q_n}{P_{n+1}} + CP_n.$$

$\diamond$

A 3.1. Tétel a differenciálegyenleteknél a megfelelője a fenti tételnek. A következő példában a fenti tétel akalmazása lesz bemutatva.

3.1. Példa. Oldjuk meg a $y_{n+1} - y_n = n$ lineáris differenciaegyenletet.
A fenti tételt alkalmazva következő eredményeket kapjuk. Az egyenletből $p_n = 1$, vagyis

$$P_n = \prod_{t=1}^{n-1} 1 = 1,$$

vagyis

$$y_n = \Delta^{-1}n + C.$$

Tehát az áltaános megoldás:

$$y_n = \frac{n^{(2)}}{2} + C = \frac{n(n-1)}{2} + C$$

3.3. Másodrendű konstans együtthatós lineáris differenciaegyenletek

3.3.1. Homogén differenciaegyenletek

Definiáljuk a homogén differenciaegyenlet fogalmát.

3.11. Definíció. *Az*

$$ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = 0$$

alakú differenciaegyenletet, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ tetszőleges állandók és $a \neq 0$, homogén másodrendű lineáris differenciaegyenletnek nevezzük.

Mint ahogy a differenciálegyenleteknél, itt is visszavezethetjük a differenciaegyenlet megoldását egy másodfokú algebrai egyenlet megoldására. Ezt láthatjuk a következő tételben.

3.2. Tétel. *A* $ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = 0$ *differenciaegyenletnek az* $y = \lambda^n$ *megoldása akkor és csakis akkor ha* $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Bizonyítás. Legyen $y_n = \lambda^n$. Ekkor $y_{n+1} = \lambda^{n+1}$ és $y_{n+2} = \lambda^{n+2}$. Ha ezt behelyettesítjük a differenciaegyenletbe, akkor a következőt kapjuk:

$$a\lambda^{n+2} + b\lambda^{n+1} + c\lambda^n = 0.$$

Ezt az egyenletet eloszthatjuk λ^n-el,és így az

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

egyenletet kapjuk. $\diamond$

Észrevehető, hogy az elhangzott tétel és bizonyításának ötlete analóg a differenciálegyenleteknél található megfelelő tétel bizonyításával.
Az $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ egyenletet karakterisztikus egyenletnek nevezzük. A differenciaegyenlet megoldása a karakterisztikus egyenlet megoldásától függ.

- Ha $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ és $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor

  $$y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n,$$

  ahol c_1 és c_2 1-periodikus függvények.

- Ha $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ akkor

  $$y_n = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n,$$

  ahol c_1 és c_2 1-periodikus függvények.

- Ha $\lambda_1 = d + fi = \rho e^{\alpha i}, \lambda_2 = d - fi = \rho e^{-\alpha i} \in \mathbb{C}$ akkor

  $$y_n = \rho^n(c_1 \cos \alpha n + c_2 \sin \alpha n),$$

  ahol c_1 és c_2 1-periodikus függvények.

Fontos megjegyezni, hogy az 1-periodikus függvények a diszkrét pontokban úgy viselkednek mint a konstansok, vagyis állandó az értékük. Ezért nem hiba, ha a példákban 1-periodikus függvény helyett konstansokat említünk.

3.3.2. Inhomogén differenciaegyenletek

Az inhomogén differenciaegyenleteknél is jelen van az analógia. Ez látható a következő definíciókban és tételekben.

3.12. Definíció. *Az*

$$ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = g_n \tag{3.8}$$

alakú differenciaegyenletet, ahol g_n *sorozat,* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *konstansok és* $a \neq 0$ *inhomogén másodrendű lineáris differenciaegyenletnek nevezzük.*

3.3. Tétel. *Az*

$$ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = g_n$$

inhomogén egyenlet megoldása

$$y_n = c_1 y_n^1 + c_2 y_n^2 + y_n^p,$$

ahol az y_n^1 és y_n^2 az inhomogén egyenlethez tartozó homogén egyenlet általános megoldása, és y_n^p az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása.

Látható, hogy az inhomogén differenciaegyenlet és differenciálegyenlet megoldásának alakja is megegyezik. Mint ahogy a differenciálegyenleteknél, az inhomogén egyenleteket a konstansvariációs módszerrel vagy a határozatlan együtthatók módszerével oldjuk.

Konstansvariációs módszer
A konstansvariációs módszernél a partikuláris megoldást az

$$y_n^p = c_n^1 y_n^1 + c_n^2 y_n^2$$

alakban keresük. A c_n^1 és c_n^2 sorozatokat úgy kell meghatározni, hogy az y_n^p megoldása legyen az 3.8 egyenletnek. A következő tételben bemutatjuk hogyan határozható meg a c_n^1 és c_n^2 sorozat.

3.4. Tétel. *Az*

$$ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = g_n$$

inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a

$$y_n^p = c_n^1 y_n^1 + c_n^2 y_n^2$$

alakban keressük, ahol y_n^1 és y_n^2 az inhomogén egyenlethez tartozó homogén egyenlet álatános megoldása, a c_n^1 és c_n^2 sorozatokat pedig a következő egyenletrendszerből határozzuk meg:

$$\Delta c_n^1 y_{n+1}^1 + \Delta c_n^2 y_{n+1}^2 = 0$$
$$\Delta c_n^1 y_{n+2}^1 + \Delta c_n^2 y_{n+2}^2 = g_n$$

Bizonyítás. Először számoljuk ki a y_{n+1}^p és y_{n+2}^p értékeket.

$$y_{n+1}^p = c_{n+1}^1 y_{n+1}^1 + c_{n+1}^2 y_{n+1}^2 =$$

$$= c_n^1 y_{n+1}^1 + c_n^2 y_{n+1}^2 + \Delta c_n^1 y_{n+1}^1 + \Delta c_n^2 y_{n+1}^2.$$

Tegyük fel, hogy a $\Delta c_n^1 y_{n+1}^1 + \Delta c_n^2 y_{n+1}^2$ azonosan 0 sorozat.

$$y_{n+2}^p = c_{n+2}^1 y_{n+2}^1 + c_{n+2}^2 y_{n+2}^2 =$$
$$= c_n^1 y_{n+2}^1 + c_n^2 y_{n+2}^2 + \Delta c_n^1 y_{n+2}^1 + \Delta c_n^2 y_{n+2}^2.$$

Ha a kapott kifejezéseket behelyettesítjük a 3.8 egyenletbe, akkor a következőket kapjuk:

$$c_n^1(y_{n+2}^1 + ay_{n+1}^1 + by_n^1)+$$

$$c_n^2(y_{n+2}^2 + ay_{n+1}^2 + by_n^2) +$$
$$\Delta c_n^1 y_{n+2}^1 + \Delta c_n^2 y_{n+2}^2 = g_n.$$

Mivel y_n^1 és y_n^2 a homogén egyenlet megoldásai, ezért a $y_{n+2}^1 + ay_{n+1}^1 + by_n^1$ és $y_{n+2}^2 + ay_{n+1}^2 + by_n^2$ kifejezések egyenlőek 0-val. Vagyis

$$\Delta c_n^1 y_{n+2}^1 + \Delta c_n^2 y_{n+2}^2 = g_n.$$

$\diamond$

Most mutassuk be ennek a módszernek az alkalmazását egy példán.

3.2. Példa. Az

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2^n$$

egyenletet oldjuk meg konstanvariációs módszerrel. Az egyenlet homogén részének a karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

melynek a karakterisztikus gyökei $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 3$. Tehát a homogén egyenlet általános megoldása

$$y_n = c_1 2^n + c_2 3^n.$$

Keressük a partikulális megoldást $y_n^p = c_n^1 2^n + c_n^2 3^n$ alakban. Mint láthattuk, a c^1, c^2 sorozatoknak ki kell elégíteni a

$$\Delta c_n^1 2^{n+1} + \Delta c_n^2 3^{n+1} = 0$$
$$\Delta c_n^1 2^{n+2} + \Delta c_n^2 3^{n+2} = 2^n$$

egyenletrendszert minden n esetén. Ezért

$$\Delta c_n^1 = -\frac{1}{2}, \Delta c_n^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

ahonnan egy lehetséges választás

$$c_n^1 = -\frac{1}{2}n, c_n^2 = \frac{1}{3}\sum_{t=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^t = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Így az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása :

$$y_n^p = -\frac{1}{2}n2^n + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} 3^n = \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}n\right)2^n + 3^n,$$

és az általános megoldás:

$$y_n = \left(c_1 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}n\right)2^n + (c_2 + 1)3^n$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ami ekvivalens az

$$y_n = (d_1 2^n + d_2 3^n) - \frac{1}{2}n2^n$$

felírással, ahol $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.

Mint láthattuk a konstansvariációs módszer elég hosszadalmas eljárás a differenciaegyenletek esetében. Az inhomogén egyenleteket egyszerűbben is megoldhatjuk. Ennek az eljárásnak a neve határozatlan együtthatók módszere.

Határozatlan együtthatók módszere
Az

$$ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = \lambda_*^n h_n$$

konstans együtthatós inhomogén egyenlet, $\lambda_* \in \mathbb{C}$, h s-edfokú polinom, $s \in \mathbb{N}$ partikuláris megoldását

$$y_n^p = \lambda_*^n n^m (b_s + b_{s-1} n^{s-1} + \cdots + b_1 n + b_0)$$

alakban keressük, ahol az $m \geqslant 0$ egész szám, a λ_* komplex számnak, mint karakterisztikus gyöknek a multiplicitása (ha λ_* nem karakterisztikus gyök, akkor $m = 0$). A $b_s, b_{s-1}, \ldots, b_0$ határozatlan együtthatókkal az egyenletbe való behelyettesítéssel határozzuk meg.
Ezt a módszert is szemléltessük példán.

3.3. Példa. Az

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2^n$$

egyenlet homogén részének a karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

melynek a karakterisztikus gyökei $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 3$. Ebből megállapíthatjuk, hogy $\lambda_* = 2$, $h_n = 1$, és $m = 1$. Tehát a partikuláris megoldást az $y_n^p = bn2^n$ alakban keressük. Behelyettesítve ezt az inhomogén egyenletbe a b konstansra a

$$b((n+2)2^{n+2} - 5(n+1)2^{n+1} + 6n2^n) = -2b2^n = 2^n$$

feltételt kapjuk, tehát $b = -\frac{1}{2}$, vagyis a partikuláris megoldás

$$y_n^p = -\frac{1}{2} n 2^n.$$

Megfigyelhető, hogy mindkét módszerrel ugyanazt a megoldást kapjuk, de a határozatlan együtthatók módszerével gyorsabban és egyszerűbb számolással jutunk el a végeredményig. Észrevehető még, hogy a konstansvariációs módszer és a határozatlan együtthatók módszere a differenciálegyenleteknél és a differenciaegyenleteknél megegyezik, egyedüli különbség itt is csak az operátorokban van és abban a lényegbeli eltérésben, amit maga a megoldás jelent.

4. Differenciaegyenletek tükörből

A differenciaegyenletek megoldásai számsorozatok, melyek a $[0, +\infty)$ halmazon értelmezettek, ezért szimmetrikus megoldásokat csak úgy találhatunk, ha két megoldás között van szimmetria az x-tengellyel. Azonban még így is nehéz szimmetrikus megoldásokat találni. Ez is egyfajta különbség a két egyenlettípus között. Ebben a részben olyen megoldásokat mutatok be, ahol látható a szimmetria, illetve amely megoldások grafikonjai egymás tükörképei.

4.1. Példa. Nézzük a $y_{n+2} - y_{n+1} + \frac{1}{4}y_n = 0$ differenciaegyenlet.
Az egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0.$$

Ebből

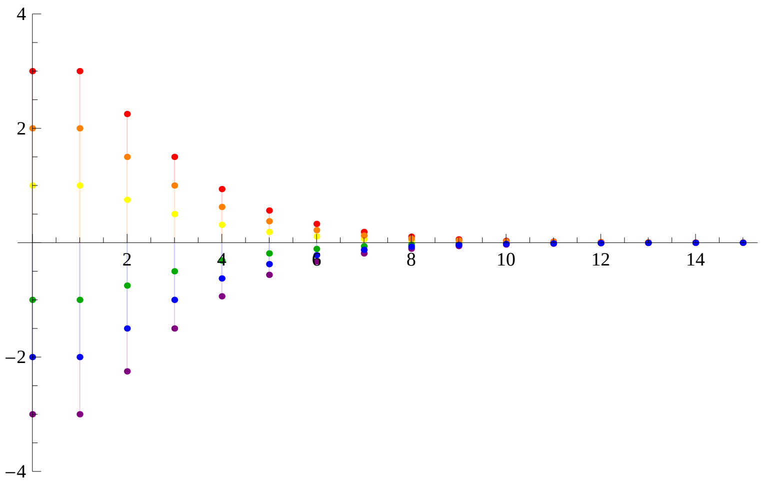
$$\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}.$$

Tehát az általános megoldás

$$y_n = C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_2 n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

A következő ábrán a $C_1 = C_2 = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ értékekre a partikuláris megoldások láthatóak.



8. ábra

Mint láthatjuk, a megoldások egymás tükörképei. A $C_1 = C_2 = \{-3, -2, -1\}$ állandókat tartalmazó partikuláris megoldásnak a $C_1 = C_2 = \{3, 2, 1\}$ állandókat tartalmazó partikuláris megoldások a tükörképei.

4.2. Példa. Tekintsük meg a $y_{n+2} - \frac{3}{4}y_{n+1} + \frac{1}{8}y_n = 0$ differenciaegyenletet. Az egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8} = 0.$$

Ebből

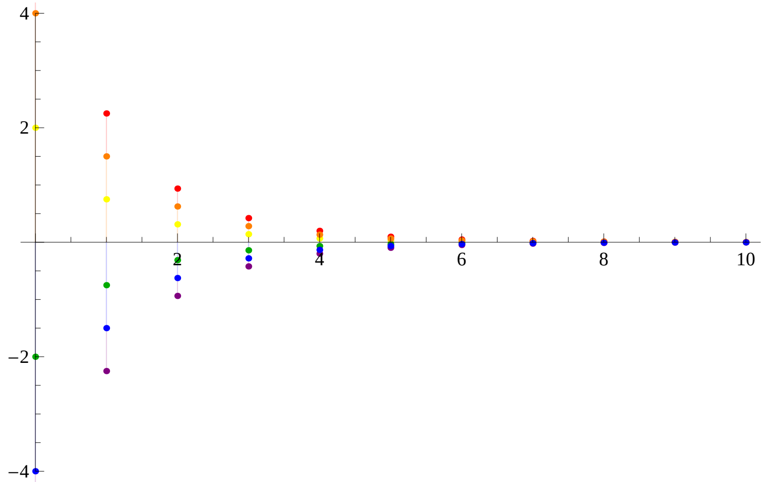
$$\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2} \text{ és } \lambda_2 = \tfrac{1}{4}.$$

A differenciaegyenlet általános megoldása:

$$y_n = C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

A következő ábrán a $C_1 = C_2 = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ értékekre a partikuláris megoldások láthatóak.



9. ábra

A két megoldás akkor lesz egymásnak a tükörképe, ha C_1 és $-C_1$ valamint C_2 és $-C_2$ konstansokat választjuk a két különböző partikuláris megoldásra.

4.3. Példa. Tekintsük meg a $y_{n+2} - \frac{3}{2}y_{n+1} + \frac{1}{2}y_n = 0$ differenciaegyenletet. Az egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0.$$

Ebből

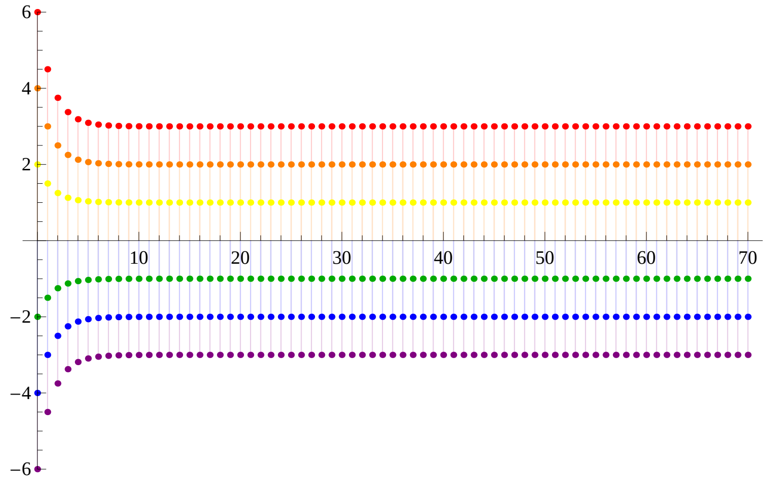
$$(\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ és } \lambda_2 = \tfrac{1}{2}.$$

A differenciaegyenlet általános megoldása:

$$y_n = C_1 1^n + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

A következő ábrán a $C_1 = C_2 = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ értékekre a partikuláris megoldások láthatóak.



10. ábra

A két megoldás akkor lesz egymásnak tükörképe, ha C_1 és $-C_1$ valamint C_2 és $-C_2$ konstansokat választjuk.

4.4. Példa. Tekintsük meg a $y_{n+2} - \frac{11}{6}y_{n+1} + \frac{5}{6}y_n = 0$ differenciaegyenletet. Az egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 - \frac{11}{6}\lambda + \frac{5}{6} = 0.$$

Ebből

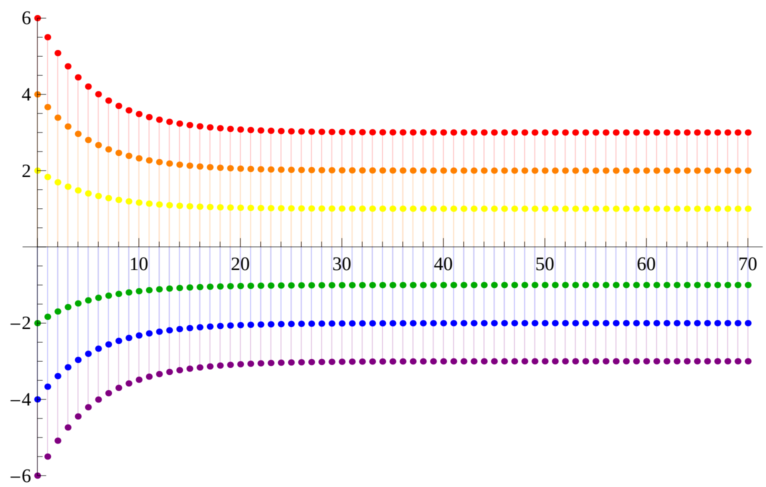
$$(\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{5}{6}\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ és } \lambda_2 = \tfrac{5}{6}.$$

A differenciaegyenlet általános megoldása:

$$y_n = C_1 1^n + C_2 \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

A következő ábrán a $C_1 = C_2 = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ értékekre a partikuláris megoldások láthatóak.



11. ábra

A két megoldás akkor lesz egymásnak tükörképe, ha C_1 és $-C_1$ valamint C_2 és $-C_2$ konstansokat választjuk a partikuláris megoldásokra.

4.5. Példa. Tekintsük meg a $y_{n+2} - \frac{19}{10}y_{n+1} + \frac{9}{10}y_n = 0$ differenciaegyenletet. Az egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 - \frac{19}{10}\lambda + \frac{9}{10} = 0.$$

Ebből

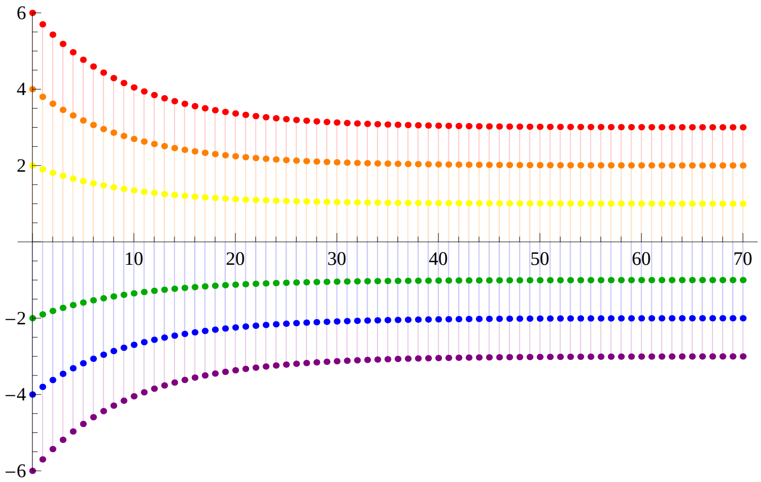
$$(\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{9}{10}\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ és } \lambda_2 = \tfrac{9}{10}.$$

A differenciaegyenlet általános megoldása:

$$y_n = C_1 1^n + C_2\left(\frac{9}{10}\right)^n$$

A következő ábrán a $C_1 = C_2 = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ értékekre a partikuláris megoldások láthatóak.



12. ábra

Ennél a példánal is a partikuláris megoldások egymás tükörképei.

4.6. Példa. Tekintsük meg a $y_{n+2} - \frac{39}{20}y_{n+1} + \frac{19}{20}y_n = 0$ differenciaegyenletet. Az egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 - \frac{39}{20}\lambda + \frac{19}{20} = 0.$$

Ebből

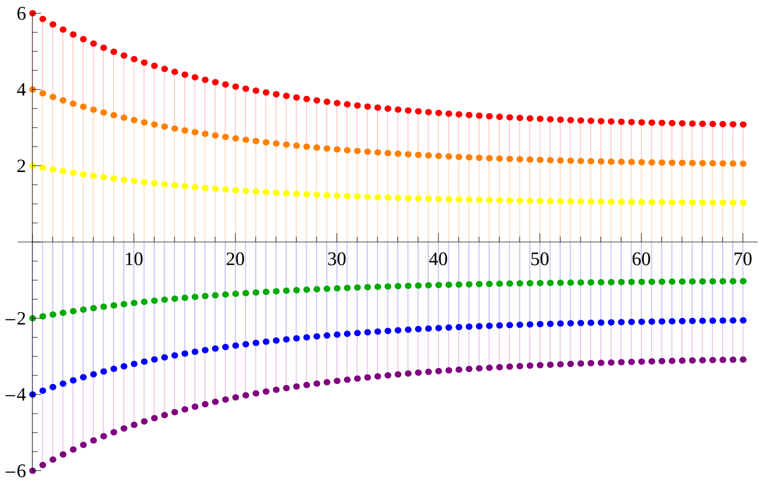
$$(\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{19}{20}\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ és } \lambda_2 = \tfrac{19}{20}.$$

A differenciaegyenlet általános megoldása:

$$y_n = C_1 1^n + C_2 \left(\frac{19}{20}\right)^n$$

A következő ábrán a $C_1 = C_2 = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ értékekre a partikuláris megoldások láthatóak.



13. ábra

A két megoldás akkor lesz egymásnak tükörképe, ha C_1 és $-C_1$ valamint C_2 és $-C_2$ konstansokat választjuk.

4.7. Példa. Tekintsük meg a $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0$ differenciaegyenletet. Az egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Ebből

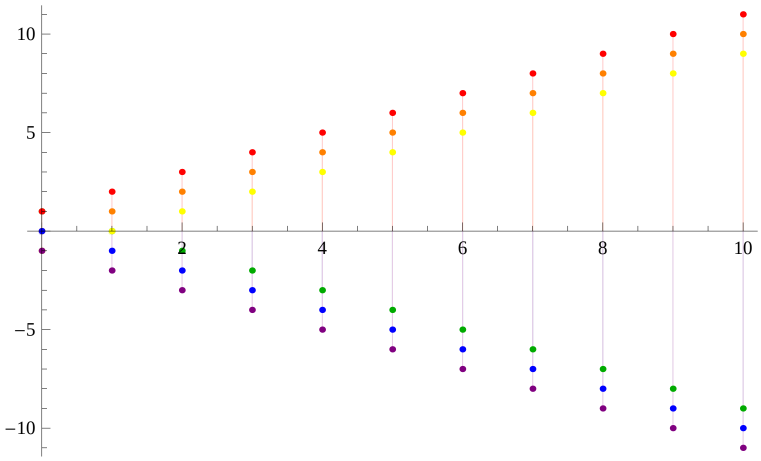
$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1.$$

Tehát az általános megoldás

$$y_n = C_1 1^n + C_2 n 1^n.$$

A következő ábrán a C_1 és C_2 nem konstans, hanem 1-periodikus függvény, de a diszkrét pontokban ugy viselkedik mint a konstans. Az itt lévő ábrán piros színnel van jelölve a amikor $C_1 = C_2 = \cos(2\pi n)$, lilával amikor $C_1 = C_2 = -\cos(2\pi n)$, narancssárgával amikor $C_1 = \tan(\pi n), C_2 = \cos(2\pi n)$, kékkel amikor $C_1 = -\tan(\pi n)$, $C_2 = -\cos(2\pi n)$, zöldel amikor $C_1 = \cos(2\pi n), C_2 = -\cos(2\pi n)$, sárgával pedig $C_1 = \cos(2\pi n)$,$C_2 = -\cos(2\pi n)$.



14. ábra

Ebben az esetben is érvényes, hogy a két megoldás akkor lesz egymásnak tükörképe, ha C_1 és $-C_1$ valamint C_2 és $-C_2$ konstansokat választjuk.

4.8. Példa. Oldjuk meg a $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 0$ differenciaegyenletet is.
Az egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

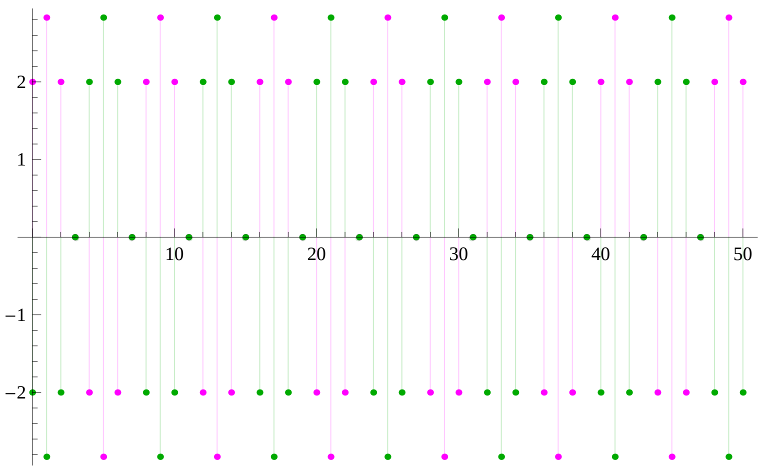
$$(\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 + i \text{ és } \lambda_2 = 1 - i$$

Vagyis az álltalános megoldás:

$$y_n = C_1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

A következő ábrán a $C_1 = C_2 = \{-1, 1\}$ értékekre a partikuláris megoldások láthatóak.



15. ábra

Látható, hogy a két a sorozat szimmetrikus egymással.

5. Összegzés

Dolgozatom írása során az volt a célom, hogy kivizsgáljam a hasonlóságokat és eltéréseket a differenciálegyenletek és differenciaegyenletek tulajdonságai között, valamint, hogy bemutassak olyan differenciál- és differenciaegyenleteket, melyek megoldásainak grafikonjai szimmetrikusak. Megállapítható, hogy a két egyenlet sok hasonlóságot mutat. Lényegbeli különbséget jelent a két egyenlet fajta megoldása, hiszen a differenciálegyenletek esetében folytonos görbe, illetve görbesereg jelenti a megoldást, a differenciegyenletek esetében pedig diszkrét pontok, illetve azoknak egy serege, melyek még 1-perodikus függvényekben is eltérhetnek egymástól.
A hasonlóság a differenciaegyenletek és differenciálegyenletek definiálása között, és a típusaik között is fellelhető. Az általam bemutatott lineáris differenciaegyenletek a lineáris differenciálegyenletek valamiféle tükörképei. Ugyanez elmondható a másodrendű konstans együtthatós lineáris differenciál- és differenciaegyenletek típusra is. Foglalkoztam még a differenciálegyenletek és differenciaegyenletek partikuláris megoldásának alakjával is. Igyekeztem olyan példákat találni, ahol a partikuláris megoldások szimmetrikusak az y-tengelyre, az x-tengelyre vagy a $(0, 0)$ pontra. Ez csak a differenciálegyenleteknél lehetséges, mivel a differenciaegyenletek csak az x-tengely pozitív felén értelmezettek. Így a differenciaegyenleteknél a szimmetriát két partikuláris megoldás között kell keresni.
Nagy örömöt jelentett a számomra, hogy megismerkedhettem a dolgozatban bemutatott új fogalmakkal és azok különleges tulajdonságaival. Remélem, hogy a jövőben még sok hasonló kihívás vár rám.

Irodalom

[1] K. S. Miller, *An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations*, Henry Holt and Company, New York, 1960.

[2] L. Brand, *Differential and Difference Equations*, John Willey and Sons, New York, 1966.

[3] T. Szerényi, *Analízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[4] G. Csikós Pajor, H. Péics, *Analízis, elméleti összefoglaló és példatár*, Bolyai Farkas Alapítvány, Zenta, 2010.

[5] H. Péics, *Oscilatorna rešenja diferencijalnih i diferencnih jednačina sa kašnjenjem - magistarski rad*, Novi Sad, 1995.

[6] M. Sain, *Nincs királyi út*, Gondolat, Budapest, 1986.

[7] T. Kármán, M.A. Biot, *Matematikai módszerek-műszaki feladatok megoldására*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963

[8] L. Hatvani, T.Krisztin, G.Makay, *Dinamikus modellek a közgazdaságban*, Polygon Könyvkiadó, Szeged, 2001